Μάθημα: **Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών, Ιούνιος 2020**
Διδάσκοντες: Α. Τόλιας - Ε. Νικολιδάκης
Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος Μαθηματικός

Θέμα 1
Να λύσετε την εξίσωση:

$$\cos^4 x - \sin^4 x - 2\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να κάνετε διαφορά τετραγώνων στους 2 πρώτους προσθετέους).

Θέμα 2

(i) Αν p, q, r λογικές προτράσεις, να κάνετε τον πίνακα αλήθειας της πρότασης $\sim [(p \wedge q) \Rightarrow r]$.

(ii) Αν η παραπάνω πρόταση είναι αληθής, αποφανθείτε κατά πόσο οι προτάσεις p, q, r είναι αληθείς.

(iii) Υπό την ίδια υπόθεση του ζητήματος (ii) ποια τιμή αλήθειας έχουν οι προτάσεις $(p \vee r) \Rightarrow q$ και $(r \Leftrightarrow q) \vee (\sim p)$;

Θέμα 3
Δίνονται τα σύνολα $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$. Να υπολογίσετε τα σύνολα $\Gamma = \mathcal{P}(A) \cap B$ και $\Delta = \mathcal{P}(\Gamma)$.

Θέμα 4

(i) Αν σ είναι μία διμελής σχέση επί ενός συνόλου τέτοια, ώστε $\sigma^{-1} \subseteq \sigma$, τότε να αποδείξετε ότι $\sigma = \sigma^{-1}$.

(ii) Έστω συνάρτηση $f\colon K \to \Lambda$. Ορίζουμε στο K τη σχέση σ ως εξής·

$$\forall x, y \in K,\ x\sigma y \iff f(x) = f(y).$$

Να αποδείξετε ότι η σ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο K. Να αποδείξετε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[x] = f^{-1}(\{f(x)\}),\ x \in K$.

(iii) Στο σύνολο $E = \{a, b, c, d, e\}$ να ορίσετε μια σχέση διάταξης $\leq$ (καταγράφοντας το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που την αποτελούν), ώστε το a να είναι μέγιστο του E και το E να έχει δύο ακριβώς ψευδοελάχιστα τα d και e.

Θέμα 5
Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log(|x|)$ (όπου $\log(a)$ είναι ο λογάριθμος με βάση το e). Εξετάστε αν f 1-1 και επί. Υπολογίστε τα σύνολα $f^{-1}(A)$ και $f(B)$, αν $A = [0, +\infty)$ και $B = [-1, e^2] \setminus \{0\}$.

Θέμα 6
Διατυπώστε την Αρχιμήδεια Ιδιότητα των πραγματικών αριθμών και με χρήση αυτής αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ισχύει $\inf A = 0$.

Θέμα 7
Διατυπώστε το θεώρημα των Schröder- Bernstein και αποδείξτε με χρήση αυτού ότι

$$[0,1] \cup (2,3] \cup [7,9) \simeq [0,10).$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ